Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Vektoranalysis **1**

1.1 Definition eines Vektors . . . 1
1.1.1 Skalarprodukt zweier Vektoren . . . 2
1.1.2 Vektorielles Produkt zweier Vektoren . . . 4
1.1.3 Produkte aus drei und vier Vektoren . . . 5
1.2 Koordinatensysteme - Teil 1 . . . 8
1.2.1 Kartesisches Koordinatensystem . . . 8
1.2.2 Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme . . . 9
1.3 Gradient . . . 12
1.3.1 Gradient einer skalaren Ortsfunktion . . . 12
1.3.2 Wegintegral eines Gradientfeldes . . . 14
1.4 Divergenz . . . 15
1.4.1 Definition der Divergenz . . . 15
1.4.2 Ausdruck für die Divergenz eines Vektorfeldes . . . 17
1.4.3 Divergenz eines Produktes . . . 19
1.4.4 Divergenz eines Gradientenfeldes . . . 20
1.4.5 Gausssches Divergenztheorem . . . 21
1.4.6 Integralsätze von Green . . . 23
1.5 Rotation . . . 24
1.5.1 Definition der Rotation . . . 24
1.5.2 Ausdruck für die Rotation eines Vektorfeldes . . . 26
1.5.3 Rotation eines Produktes . . . 27
1.5.4 Wirbelfreiheit des Gradientenfeldes . . . 29
1.5.5 Quellenfreiheit eines Wirbelfeldes . . . 29
1.5.6 Integralsatz von Stokes . . . 30
1.6 Nabla-Operator . . . 32
1.6.1 Definition des Nabla-Operators . . . 32
1.6.2 Divergenz eines Vektorproduktes . . . 34
1.6.3 Integralsätze von Stratton . . . 35
1.6.4 Rotation eines Vektorproduktes . . . 36
1.6.5 Gradient eines Skalarproduktes . . . 37
1.6.6 Ausdruck für die zweifache Rotation . . . 38
1.6.7 Ausdruck für die dreifache Rotation . . . 40

1.6.8 Differentialoperatoren für den Abstandsvektor 41
1.7 Koordinatensysteme - Teil 2 41
1.7.1 Koordinaten des Kreiszylinders 41
1.7.2 Vektoroperationen in Zylinderkoordinaten 43
1.7.3 Kugelkoordinaten 45
1.7.4 Vektoroperationen in Kugelkoordinaten 48

2 Elektrostatisches Feld **51**
2.1 Gesetz von COULOMB 51
2.2 Feldgleichung der Elektrostatik 52
2.2.1 Feld einer Raumladung 56
2.2.2 Feld einer Flächenladung 61
2.2.3 Feld einer Linienladung 64
2.2.4 Feld mehrerer Punktladungen 66
2.2.5 Feld eines Dipols 68
2.2.6 Feld einer Doppelschicht 70
2.2.7 Feld homogener Dipolverteilungen 73
2.2.8 Dipolverteilung auf einer Ebene 77
2.2.9 Gerade homogene Linienladung 81
2.2.10 Mehrere gerade homogene Linienladungen 84
2.2.11 Felder von Liniendipolen 86
2.2.12 Felder ebener Doppelschichten 87
2.3 Graphische Darstellung von Feldern 89
2.3.1 Äquipotentialflächen 89
2.3.2 Feldlinien und Flussröhren 91
2.3.3 Flussröhren rotationssymmetrischer Felder 94
2.3.4 Singuläre Punkte 96
2.3.5 Graphische Darstellung ebener Felder 100
2.4 Oberflächen leitender Körper 102
2.4.1 Spiegelung an einer leitenden Ebene 106
2.4.2 Spiegelung an mehreren leitenden Ebenen 107
2.4.3 Spiegelung an einer leitenden Kugel 113
2.4.4 Spiegelung an einem leitenden Zylinder 117
2.5 Feldgleichung für isotropes Dielektrikum 120
2.5.1 Dielektrische Polarisation isotroper Medien 123
2.5.2 Theorie der dielektrischen Halbräume 126
2.5.3 Theorie des dielektrischen Zylinders 133
2.6 Systeme aus mehreren Leitern 137
2.6.1 Reziprozitätstheorem von GREEN 138
2.6.2 MAXWELLsche Potentialkoeffizienten 141
2.6.3 MAXWELLsche Kapazitätskoeffizienten 143
2.6.4 Begriff der Teilkapazitäten 145
2.6.5 Vollkommen abgeschirmte Leiter 146

2.7 Energieinhalt des Feldes . . . 147
2.7.1 Begriff der Energiedichte . . . 150
2.7.2 Energie eines dielektrischen Körpers . . . 152
2.7.3 Theorie von KELLOG und EARNSHAW . . . 154
2.8 Begriff der Kraftdichte . . . 156
2.8.1 MAXWELLsche Spannungen . . . 159
2.8.2 Kräfte an Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten . . . 161
2.8.3 Kräfte an leitenden Oberflächen . . . 163
2.8.4 Kräfte im System mehrerer Leiter . . . 163
2.8.5 Kraftwirkung auf Dipole . . . 166

3 Elektrostatik - Randwertproblem erster Art 169
3.1 Eindeutigkeitsbeweis . . . 170
3.2 Charakteristisches Lösungsbeispiel . . . 170
3.3 Randwertproblem in kartesischen Koordinaten . . . 186
3.4 Randwertproblem in Zylinderkoordinaten . . . 192
3.4.1 Lösung des Teilproplems A . . . 196
3.4.2 Lösung des Teilwertproblems B . . . 202
3.5 Randwertproblem in Kugelkoordinaten . . . 216
3.6 Das ebene Randwertproblem . . . 223

4 Stationäres Strömungsfeld 233
4.1 Kontinuitätsgleichung . . . 233
4.2 Definition des stationären Strömungsfeldes . . . 234
4.3 Erfahrungssatz OHMsches Gesetz . . . 235
4.4 Aufstellung der Feldgleichung . . . 236
4.5 Analogie zum elektrostatischen Feld . . . 237
4.6 Spiegelungsverfahren . . . 240
4.7 Leitwert- und Widerstandskoeffizienten . . . 241

5 Stationäres Strömungsfeld - Randwertproblem zweiter Art 245
5.1 Eindeutigkeitsbeweis . . . 246
5.2 Charakteristisches Lösungsbeispiel . . . 247

6 Magnetostatik 253
6.1 Definition und Erfahrungssätze . . . 253
6.2 Magnetisches Vektorpotential . . . 255
6.3 Magnetisches Skalarpotential . . . 258
6.4 Kleine dünne kreisförmige Leiterschleife . . . 262
6.5 Langgestreckte Zylinderspule . . . 266
6.6 Unstetigkeiten der magnetischen Feldstärke . . . 268
6.7 Halbräume verschiedener Permeabilitäten . . . 270
6.8 Strombelag auf einer ebenen Fläche . . . 275

6.9 Magnetische Feldlinien und Flussröhren . . . 280
6.10 Hochpermeable Teilräume . . . 284
6.11 Spiegelung an hochpermeablen Ebenen . . . 287
6.12 Komplexes magnetisches Potential . . . 291
6.12.1 Komplexes Potential für permeable Halbräume . . . 296
6.12.2 Anwendung der SCHWARZ-CHRISTOFFEL-Transformation . . . 298
6.13 Spiegelung am permeablen Zylinder . . . 300
6.14 Energie des magnetostatischen Feldes . . . 304
6.14.1 Magnetische Energie räumlicher Massivleiter . . . 305
6.14.2 Induktivitäten räumlicher Massivleiter . . . 307
6.14.3 Gegeninduktivitäten dünner Leiterschleifen . . . 309
6.14.4 Selbstinduktivität einer dünnen Leiterschleife . . . 310
6.14.5 Energie eines permeablen Körpers . . . 313
6.15 Kräfte im magnetischen Feld . . . 313
6.15.1 MAXWELLsche Spannungen . . . 313
6.15.2 Begriff der Kraftdichte . . . 315
6.15.3 Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter . . . 317
6.15.4 Kraftwirkung auf geladene Teilchen . . . 319

7 Randwertproblem der Magnetostatik 323
7.1 Lösung des Teilproplems A . . . 325
7.2 Lösung des Teilproplems B . . . 326
7.2.1 Zylinderkoordinaten . . . 326
7.2.2 Kugelkoordinaten . . . 327

8 Elektromagnetisches Feld 329
8.1 Induktionsgesetz von FARADAY . . . 329
8.2 Existenznotwendigkeit des Verschiebungsstromes . . . 330
8.3 MAXWELLsche Gleichungen . . . 331
8.4 Feldgleichungen für die Feldstärken . . . 333
8.5 Elektrodynamische Potentiale . . . 335
8.5.1 LORENTZ-Konvention . . . 336
8.5.2 COULOMB-Eichung . . . 340
8.6 POYNTINGscher Vektor . . . 342
8.7 Feldgleichungen für zeitlich periodische Feldgrößen . . . 347
8.8 Skineffekt . . . 348
8.8.1 Skineffekt im stromdurchflossenen Massivleiter . . . 348
8.8.2 Induzierter Skineffekt im leitenden Halbraum . . . 361
8.8.3 Transienter Skineffekt . . . 370
8.8.4 Skineffekt bei kleinen Eindringtiefen . . . 379
8.8.5 Separation der Skingleichung . . . 381
8.8.6 Massivzylinder im magnetischen Wechselfeld . . . 386
8.8.7 Massivkugel im magnetischen Wechselfeld . . . 389

8.9 Wellenausbreitung 393
8.9.1 Ebene Welle 393
8.9.2 Strahlung eines Stromelementes 398
8.9.3 Strahlung linearer Antennen 405
8.9.4 Stromverteilung auf linearen Antennen 408
8.9.5 Retardiertes HERTZsches Potential 410
8.9.6 Wellenausbreitung in Hohlleitern 412
8.9.7 Wellenausbreitung auf Leitungen 431

9 Formelsammlung **437**
9.1 Allgemeine Vektorrechnung 437
9.2 Vektoroperationen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten (u_1, u_2, u_3) . 437
9.3 Vektoroperationen in kartesischen Koordinaten (x, y, z) 438
9.4 Vektoroperationen in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) 438
9.5 Vektoroperationen in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) 439
9.6 Umformungen des Gradienten 439
9.7 Umformungen der Divergenz 440
9.8 Umformungen der Rotation 440
9.9 Umformungen des LAPLACE-Operators 440
9.10 Integralsätze 441